

# "Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

DU Financial Engineering

SU (Sorbonne Université) - X (Ecole polytechnique)

Emmanuel Gobet (cours et TD)

Rappel du cadre de la séance 2 : nous nous plaçons dans un marché à temps discret avec  $n$  dates  $0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T$ .

- Prix d'un actif négociable au temps  $t_i$  :  $S_{t_i}$
- *Modèle binomial* :  $S_{t_{i+1}} = \begin{cases} S_{t_i} \times u \\ S_{t_i} \times d \end{cases}$  avec  $d \leq 1 \leq u$ .

# 1 Pricing et couverture d'une option américaine

## 1.1 Description du contrat

- L'acheteur peut exercer l'option à tout moment  $t_i$  jusqu'à la maturité  $T$
- et recevoir le **payoff**  $\Psi(S_{t_i})$  si l'option est exercée au temps  $t_i$ .

Euronext : toutes les options sur action sont américaines !

#### Product

Air France-KLM - Weekly Option 1st Friday FR001400J770

**1AF**

Stock Option Short Call

Manufacturer: Euronext

[www.euronext.com](http://www.euronext.com)

Competent Authority: Autoriteit Financiële Markten (AFM) - The Netherlands Authority for the Financial Markets (AFM)

Document creation date: 2023-10-27

#### Alert

You are about to purchase a product that is not simple and may be difficult to understand.

#### What is this product?

##### Type

Derivative. Stock options are considered to be derivatives under Annex I, Section C of MiFID 2014/65/EU.

##### Objectives

A call option gives the buyer (long position) the right, during the fixed period stated in the contractual terms, to buy a specified amount of the underlying asset at a pre-determined price (strike price). Sellers (writers) of call options (short position) take on an obligation to make delivery of the underlying asset if the option is exercised by the buyer.

Each option series has its own maturity date, after which the product will expire. An open position can be closed at any time before the maturity date by entering into a closing transaction.

## Notion de temps d'arrêt

- Concrètement : l'acheteur de l'option peut décider de s'arrêter à un instant  $\tau$  sur la base de l'observation de la trajectoire du sous-jacent  $S$  jusqu'à cet instant.
- Cela veut dire que le temps  $\tau$  est un temps aléatoire (il n'est pas fixé au départ, il sera choisi "en cours de route").
- Mathématiquement,  $\tau$  appartient donc à la classe de variables aléatoires appelées *temps d'arrêt* :

$\tau$  temps d'arrêt  $\Leftrightarrow$  l'événement  $\{\tau \leq t\}$  se décrit avec  
les trajectoires de  $S$  avant  $t$

- Notation : pour  $i \leq n$ ,  $\mathcal{T}_{i:n}$  = ensemble des temps d'arrêt à valeurs entre  $t_i$  et  $t_n$ .

Décrit un ensemble de règles d'exercice non anticipatives.

## Portefeuille de couverture

— *Rappels séance 2* : portefeuille de couverture

$$V_t = \pi_t^0 + \delta_t S_t$$

— Au moment du rebalancement à l'instant  $t_{i+1}$ , la condition d'autofinancement s'écrit

$$V_{t_{i+1}} = \pi_{t_{i+1}}^0 + \delta_{t_{i+1}} S_{t_{i+1}} = \pi_{t_i}^0 (1 + r) + \delta_{t_i} S_{t_{i+1}}$$

ce qui donne

$$V_{t_{i+1}} = (V_{t_i} - \delta_{t_i} S_{t_i})(1 + r) + \delta_{t_i} S_{t_{i+1}} = V_{t_i}(1 + r) + \delta_{t_i} (S_{t_{i+1}} - S_{t_i}(1 + r))$$

et donc, en définissant les valeurs actualisés  $\tilde{V}_{t_j} := \frac{V_{t_j}}{(1+r)^j}$  et  $\tilde{S}_{t_j} := \frac{S_{t_j}}{(1+r)^j}$ ,

$$\tilde{V}_{t_{i+1}} = \tilde{V}_{t_i} + \delta_{t_i} (\tilde{S}_{t_{i+1}} - \tilde{S}_{t_i}).$$

— En termes de propriétés sous la mesure  $\mathbb{Q}$  (définie par  $q^{\text{up}}$  et  $q^{\text{down}}$ ) :

— Le processus  $(\tilde{S}_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale,  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}] = \tilde{S}_{t_i}$ .

— Le portefeuille de couverture  $V$  d'une opt. satisfait

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}] = \tilde{V}_{t_i}.$$

## Portefeuille de couverture avec consommation

- Sa valeur liquidative (investissement en cash et en actif risqué) :

$$V_t = \pi_t^0 + \delta_t S_t.$$

- A chaque date de rebalancement, on peut consommer une partie de la valeur du portefeuille. Cela s'écrit avec  $C_t =$  consommation cumulée jusqu'en  $t$  (donc  $t \mapsto C_t$  est croissante).
- La condition d'autofinancement au temps  $t_{i+1}$  s'écrit maintenant

$$V_{t_{i+1}} = \pi_{t_{i+1}}^0 + \delta_{t_{i+1}} S_{t_{i+1}} = \pi_{t_i}^0 (1 + r) + \delta_{t_i} S_{t_{i+1}} - \underbrace{(C_{t_{i+1}} - C_{t_i})}_{\text{consommation au temps } t_{i+1}}$$

ce qui donne

$$V_{t_{i+1}} = V_{t_i} (1 + r) + \delta_{t_i} (S_{t_{i+1}} - S_{t_i} (1 + r)) - (C_{t_{i+1}} - C_{t_i})$$

- Comme conséquence,
  - Le processus  $\tilde{S}_{t_i} = \frac{S_{t_i}}{(1+r)^i}$  reste une  $\mathbb{Q}$ -martingale
  - Le portefeuille de couverture actualisé  $\tilde{V}$  est maintenant une  $\mathbb{Q}$ -surmartingale :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_{t_{i+1}} | S_{t_j}, j \leq i] \leq \tilde{V}_{t_i}.$$

## 1.2 Pricing de l'option

- On cherche un portefeuille de couverture avec consommation.

Interprétation : le vendeur consomme quand l'option n'est pas exercée optimalement par l'acheteur.

- On cherche donc  $V$  autofinçant avec consommation tel que

$$V_{t_i} \geq \Psi(S_{t_i}), \quad \forall i \quad (1)$$

ce qui implique  $\tilde{V}_{t_i} = \frac{V_{t_i}}{(1+r)^i} \geq \frac{\Psi_{t_i}}{(1+r)^i} = \tilde{\Psi}(S_{t_i}), \quad \forall i.$

- Un outil mathématique (présenté dans le slide 8) permettra de montrer que, si  $\tilde{V}$  est un portef. autofin. avec consommation satisfaisant l'inégalité (1), alors

$$\tilde{V}_{t_i} \geq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{i:n}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{\Psi}(S_{\tau}) \mid S_{t_j}, j \leq i]. \quad (2)$$

On notera  $\tilde{P}_{t_i}$  le terme de droite dans l'inégalité ci-dessus.

- On peut montrer que  $\tilde{P}_i = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{i:n}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{\Psi}(S_{\tau}) \mid S_{t_i}]$  (représentation Markovienne).

On peut aussi démontrer que

1.  $(\tilde{P}_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$  est une  $\mathbb{Q}$ -surmartingale, c'est-à-dire  $\tilde{P}_{t_i} \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{P}_{t_{i+1}} \mid \mathcal{S}_{t_j}, j \leq i]$ .
2. Si une autre  $\mathbb{Q}$ -surmartingale  $\tilde{X}$  domine  $\tilde{\Psi}$ , dans le sens  $\tilde{X}_{t_i} \geq \tilde{\Psi}(S_{t_i}) \forall i$ , alors  $\tilde{X}_{t_i} \geq \tilde{P}_{t_i}$ .

En d'autres termes :  $\tilde{P}$  est la plus petite  $\mathbb{Q}$ -surmartingale dominant  $\tilde{\Psi}$

(Pour la terminologie :  $\tilde{P}$  est appelé enveloppe de Snell du payoff  $\Psi$ ).

**En conclusion :**

►  $\tilde{P}$  est le portefeuille autofinancé avec consommation qui couvre l'option américaine (en tout instant  $t_i$ ) et ayant la plus petite valeur possible.

⇒ Le processus  $\tilde{P}_{t_i} = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{i:n}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{\Psi}(S_{\tau}) \mid \mathcal{S}_{t_j}, j \leq i]$  définit donc le fair price de l'option américaine en  $t_i$ .

*Remarque :* on a toujours  $P_{t_i} \geq \Psi(S_{t_j})$  (en prenant  $\tau = t_i$ ) et

$P_{t_i} \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Psi(S_{t_n})}{(1+r)^{n-i}} \mid \mathcal{S}_{t_i}\right]$  (en prenant  $\tau = t_n$ ).

⇝ La valeur de l'option est toujours supérieure au payoff en cas d'exercice immédiat et au prix européen.

## Outil mathématique (cité dans le slide 6) :

- Si  $(M_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}$ , nous savons que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M_{t_j} | M_{t_k}, k \leq i] = M_{t_i}, \quad \forall j \geq i$$

- Il y a un résultat plus fort, le **Théorème d'arrêt pour les martingales** :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M_{\tau} | M_{t_j}, j \leq i] = M_{t_i}, \quad \text{pour tout temps d'arrêt } \tau \geq i$$

- Pour le pricing de l'opt américaine, nous avons besoin du **Théorème d'arrêt pour les surmartingales** :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[N_{\tau} | N_{t_j}, j \leq i] \leq N_{t_i}, \quad \text{pour tout temps d'arrêt } \tau \geq i$$

si  $N$  est une surmartingale.

- En utilisant le Thm d'arrêt pour les surmartingales et l'inégalité (1) pour le portef de couverture  $\tilde{V}$ , on obtient (pour tout  $t_i$  et tout  $\tau \in \mathcal{T}_{i:n}$ )

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{\Psi}(S_{\tau}) \mid S_{t_j}, j \leq i] \underbrace{\leq}_{\text{inégalité (1)}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_{\tau} \mid S_{t_j}, j \leq i] \underbrace{\leq}_{\text{Thm d'arrêt}} \tilde{V}_{t_i}.$$

En prenant le sup sur les temps  $\tau$  possibles, nous obtenons l'inégalité (2)

$$\tilde{P}_{t_i} = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{i:n}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{\Psi}(S_{\tau}) \mid S_{t_j}, j \leq i] \leq \tilde{V}_{t_i}$$

► Dans le cas spécifique où  $\Psi(S) = \text{payoff du call} = (S - K)^+$  :

**Propriété (call américain).** Si  $r \geq 0$ , alors prix américain = prix européen,  
 $\tilde{P}_{t_i} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_{t_n} - K)^+}{(1+r)^n} \mid S_{t_i}\right]$  (pas d'exercice optimal anticipé).

$\rightsquigarrow$  Conséquence de l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle et du Thm d'arrêt appliqué à  $\tilde{S}$ .



Pas de relation de parité call-put sur les options américaines.

Vers des calculs en pratique :

## 1.3 Temps d'arrêt optimal

Le temps d'arrêt optimal  $\tau_i^*$  après  $t_i$  (pour l'acheteur de l'option) est défini par

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{\Psi}(S_{\tau_i^*}) \mid S_{t_j}, j \leq i] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{i:n}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{\Psi}(S_{\tau}) \mid S_{t_j}, j \leq i] = \tilde{P}_{t_i}.$$

Rappel : on a toujours  $P_{t_i} \geq \Psi(S_{t_i})$ . Pour trouver  $\tau_i^*$ , on calcule le prix  $P$  et on observe le processus  $\Psi(S)$

1. Si  $\Psi(S_{t_i}) = P_{t_i}$  alors  $\tau_i^* = t_i$
2. Si  $\Psi(S_{t_i}) < P_{t_i}$  alors  $\tau_i^* > t_i$

► En résumé,

$$\tau_i^* = \inf\{t_j \geq t_i : P_{t_j} = \Psi_{t_j}\}$$

est le plus petit temps d'arrêt optimal.

## Les calculs en pratique :

### 1.4 Calcul rétrograde du prix

► Equation de programmation dynamique sur le processus de prix :

$$P_{t_i} = \max \left( \Psi(S_{t_i}), \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{P_{t_{i+1}}}{1+r} \middle| S_{t_i} \right] \right).$$

On appelle  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{P_{t_{i+1}}}{1+r} \middle| S_{t_i} \right]$  la valeur (actualisée) de continuation.

► Equation de programmation dynamique sur la fonction de prix : définie par  $P_{t_i} = v(t_i, S_{t_i})$  et

$$\begin{cases} v(t_n, S) = \Psi(S) \\ v(t_i, S) = \max \left( \Psi(S), \frac{1}{1+r} (v(t_{i+1}, S u) q^{\text{up}} + v(t_{i+1}, S d) q^{\text{down}}) \right), \quad i = n-1, \dots, 0 \end{cases}$$

⇒ En résolvant cette équation rétrograde, on trouve la fonction de prix  $v(t_0, S_0)$  à l'instant initial  $t_0$  (et à tout autre instant  $t_i$ )  $\rightsquigarrow$  **TP 3**

► *Pour en savoir plus* : pour montrer l'équation de programmation dynamique, on écrit (en notant pour simplifier  $\Psi_t = \Psi(S_t)$ )

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{t_i} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{\Psi}_{\tau_i^*} \mid S_{t_j}, j \leq i] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\tau_i^* = t_i} \tilde{\Psi}_{\tau_i^*} + \mathbf{1}_{\tau_i^* > t_i} \tilde{\Psi}_{\tau_{i+1}^*} \mid S_{t_j}, j \leq i] \\ &= \mathbf{1}_{\tau_i^* = t_i} \tilde{\Psi}(S_{t_i}) + \mathbf{1}_{\tau_i^* > t_i} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{P}_{t_{i+1}} \mid S_{t_j}, j \leq i] \\ &= \max(\tilde{\Psi}_{t_i}, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{P}_{t_{i+1}} \mid S_{t_j}, j \leq i]).\end{aligned}$$